New solutions to the tetrahedron equation associated with quantized six-vertex models

Atsuo Kuniba (東京大学 総合文化研究科)
Shuichiro Matsuike (東京大学 総合文化研究科)
Akihito Yoneyama (東京大学 総合文化研究科)

四面体方程式は Yang-Baxter 方程式の 3 次元における類似物である．$F_+ = \bigoplus_{m\geq 0} \mathbb{C}\,|m\rangle$ を bosonic Fock 空間，$V = \bigoplus_{m=0,1} \mathbb{C}u_i$ を fermionic Fock 空間とする．q-oscillator 代数 $\mathcal{O}_q$ とは，生成元 $\{\mathbf{a}^{\pm}, \mathbf{k}^{\pm 1}\}$ と関係式

$$\mathbf{k}\mathbf{a}^{\pm} = q^{\pm 1}\mathbf{a}^{\pm}\mathbf{k}, \quad \mathbf{a}^{-}\mathbf{a}^{+} = \mathbf{1} - q^2\mathbf{k}^2, \quad \mathbf{a}^{+}\mathbf{a}^{-} = \mathbf{1} - \mathbf{k}^2, \tag{1}$$

により生成される代数であり，F_+ 上に以下のような表現 $\pi_O : \mathcal{O}_q \to \mathrm{End}(F_+)$ を持つ：

$$\mathbf{k}\,|m\rangle = q^m\,|m\rangle\,, \quad \mathbf{a}^{+}\,|m\rangle = |m+1\rangle\,, \quad \mathbf{a}^{-}\,|m\rangle = (1-q^{2m})\,|m-1\rangle\,. \tag{2}$$

$L^O \in \mathrm{End}(V\otimes V\otimes F_+)$ を 6 頂点型の行列要素 $(L^O)^{a,b}_{i,j} \in \mathcal{O}_q$ $(i,j,a,b \in \{0,1\})$ を用いて

$$L^O(u_i\otimes u_j \otimes |k\rangle) = \sum_{a,b\in\{0,1\}} u_a\otimes u_b\otimes (L^O)^{a,b}_{i,j}\,|k\rangle\,, \tag{3}$$

$$\begin{aligned}&(L^O)^{0,0}_{0,0} = (L^O)^{1,1}_{1,1} = 1, \quad (L^O)^{0,1}_{0,1} = -q\mu^{-1}\mathbf{k}, \quad (L^O)^{1,0}_{1,0} = \mu\mathbf{k},\\ &(L^O)^{0,1}_{1,0} = \mathbf{a}^{-}, \quad (L^O)^{1,0}_{0,1} = \mathbf{a}^{+},\end{aligned} \tag{4}$$

により定義する．μ はパラメータである．このとき，以下の四面体方程式

$$L^O_{124}L^O_{135}L^O_{236}R^{OOO}_{456} = R^{OOO}_{456}L^O_{236}L^O_{135}L^O_{124}, \tag{5}$$

を考えると，(5) は

$$R^{OOO}(|i\rangle\otimes|j\rangle\otimes|k\rangle) = \sum_{a,b,c\in\mathbb{Z}_{\geq 0}} (R^{OOO})^{a,b,c}_{i,j,k}\,|a\rangle\otimes|b\rangle\otimes|c\rangle\,, \tag{6}$$

$$\begin{aligned}(R^{OOO})^{a,b,c}_{i,j,k} = \delta^{a+b}_{i+j}\delta^{b+c}_{j+k}\left(\frac{\mu_3}{\mu_2}\right)^i\left(-\frac{\mu_1}{\mu_3}\right)^b\left(\frac{\mu_2}{\mu_1}\right)^k&\\ \times q^{ik+b(k-i+1)}\binom{a+b}{a}_{q^2}\,{}_2\phi_1\left(\begin{matrix}q^{-2b}, q^{-2i}\\ q^{-2a-2b}\end{matrix}; q^2, q^{-2c}\right)&,\end{aligned} \tag{7}$$

により定義される $R^{OOO} \in \mathrm{End}(F_+\otimes F_+\otimes F_+)$ を一意な解として持ち，また，R^{OOO} は以下の四面体方程式

$$R^{OOO}_{124}R^{OOO}_{135}R^{OOO}_{236}R^{OOO}_{456} = R^{OOO}_{456}R^{OOO}_{236}R^{OOO}_{135}R^{OOO}_{124}, \tag{8}$$

を満たす．ここで，以下の記法

$$\begin{aligned}&(z;q)_m = \frac{(z;q)_\infty}{(zq^m;q)_\infty}, \quad (z;q)_\infty = \prod_{n\geq 0}(1-zq^n), \quad \binom{n}{m}_q = \frac{(q;q)_n}{(q;q)_m(q;q)_{n-m}},\\ &{}_2\phi_1\left(\begin{matrix}\alpha,\beta\\ \gamma\end{matrix}; q, z\right) = \sum_{n\geq 0}\frac{(\alpha;q)_n(\beta;q)_n}{(\gamma;q)_n(q;q)_n}z^n,\end{aligned} \tag{9}$$

を用いた．Bazhanov-Sergeev は発見的に得た local Yang-Baxter 方程式の解をさらに手で量子化することで L^O を ansatz し，上述の議論によって bosonic Fock 空間 F_+ 上の解 R^{OOO} を得た [1]．R^{OOO} は A_2 の Weyl 群の最長要素に付随する量子座標環 $A_q(A_2)$ の既約表現の intertwiner，および量子群 $U_q(A_2)$ の PBW 基底の遷移行列に一致することが知られており，代数的なアプローチが確立していない四面体方程式における顕著な結果の一つである．

本講演では，(5) を以下の四面体方程式

$$L^A_{124}L^B_{135}L^C_{236}R^{ABC}_{456} = R^{ABC}_{456}L^C_{236}L^B_{135}L^A_{124}, \tag{10}$$

に一般化することで，四面体方程式に対する新たな解 R^{ABC} を求めた．ここで，$A, B, C \in \{O, X, Z\}$ であり，L^X, L^Z は以下のように定める．q-Weyl 代数 $\mathcal{W}_q$ とは，生成元 $X^{\pm 1}, Z^{\pm 1}$ と関係式 $XZ = qZX$ により生成される代数であり，$F = \bigoplus_{m\in\mathbb{Z}} \mathbb{C}\,|m\rangle$ 上に以下の表現 $\pi_X, \pi_Z : \mathcal{W}_q \to \mathrm{End}(F)$ を持つ：

$$\pi_Z:\ \ X|m\rangle = |m-1\rangle, \quad X^{-1}|m\rangle = |m+1\rangle, \quad Z|m\rangle = q^m|m\rangle, \quad Z^{-1}|m\rangle = q^{-m}|m\rangle, \tag{11}$$
$$\pi_X:\ \ X|m\rangle = q^m|m\rangle, \quad X^{-1}|m\rangle = q^{-m}|m\rangle, \quad Z|m\rangle = |m+1\rangle, \quad Z^{-1}|m\rangle = |m-1\rangle. \tag{12}$$

$L = L_{r,s,t,w} \in \mathrm{End}(V\otimes V)\otimes\mathcal{W}_q$ を行列要素 $L^{a,b}_{i,j} \in \mathcal{W}_q\ (i, j, a, b \in \{0, 1\})$ を用いて

$$L(u_i \otimes u_j \otimes |k\rangle) = \sum_{a,b\in\{0,1\}} u_a \otimes u_b \otimes L^{a,b}_{i,j}\,|k\rangle\,, \tag{13}$$

$$\begin{aligned} &L^{0,0}_{0,0} = r, \quad L^{1,1}_{1,1} = s, \quad L^{0,1}_{0,1} = -qtX, \quad L^{1,0}_{1,0} = twX, \\ &L^{0,1}_{1,0} = Z, \quad L^{1,0}_{0,1} = Z^{-1}(rs - t^2wX^2), \end{aligned} \tag{14}$$

により定義する．ここで，r, s, t, w はパラメータである．L^X, L^Z は L を π_X, π_Z でそれぞれ evaluate したものとして定義する：

$$L^X = L^X_{r,s,t,w} = (1\otimes 1\otimes \pi_X)(L_{r,s,t,w}) \in \mathrm{End}(V\otimes V\otimes F), \tag{15}$$
$$L^Z = L^Z_{r,s,t,w} = (1\otimes 1\otimes \pi_Z)(L_{r,s,t,w}) \in \mathrm{End}(V\otimes V\otimes F). \tag{16}$$

ここで，$\mathcal{O}_q$ から $\mathcal{W}_q$ への埋め込み $\mathbf{k} \mapsto X,\ \mathbf{a}^+ \mapsto Z,\ \mathbf{a}^- \mapsto Z^{-1}(1 - X^2)$ の引き戻しを考えれば，$L^X_{1,1,\mu^{-1},\mu^2}$ は L^O と同一視することができる．よって，L^X, L^Z は L^O を $\mathcal{W}_q$ に埋め込み，パラメータを一般化したものである．

[2] において，$ABC = ZZZ, OZZ, ZZO, ZOZ, OOZ, ZOO, OZO, OOO, XXZ, ZXX, XZX$ に対して R^{ABC} の明示式を構成した．特に $A, B, C \in \{O, Z\}$ のとき，全ての場合において (10) が与える R^{ABC} に対する漸化式系は規格化を除いて一意な解を持ち，得られた R^{ABC} は (7) のように q-超幾何関数で記述されるか，または完全に因子化した．また，(10) に対する両立条件から，(8) のように R^{ABC} のみから成る四面体方程式が成り立つことが期待されるが，実際，計算機を用いることでいくつかの $A, B, C, D, E, F \in \{O, Z\}$ に対して

$$R^{ABD}_{124}R^{ACE}_{135}R^{BCF}_{236}R^{DEF}_{456} = R^{DEF}_{456}R^{BCF}_{236}R^{ACE}_{135}R^{ABD}_{124}, \tag{17}$$

が成り立っていることが実験的に確認された．また，R^{ZZZ} は R^{OOO} と同様に $A_q(A_2)$ の「可約」表現の intertwiner として得られた．

参考文献

[1] V. V. Bazhanov, S. M. Sergeev, *Zamolodchikov's tetrahedron equation and hidden structure of quantum groups*, J. Phys. A: Math. Theor. **39** 3295 16pages (2006).

[2] A.Kuniba, S.Matsuike, A.Yoneyama, *New solutions to the tetrahedron equation associated with quantized six-vertex models*, arXiv:2208.10258.