

3D reflection maps from tetrahedron maps

Akihito Yoneyama (東京大学 総合文化研究科)*

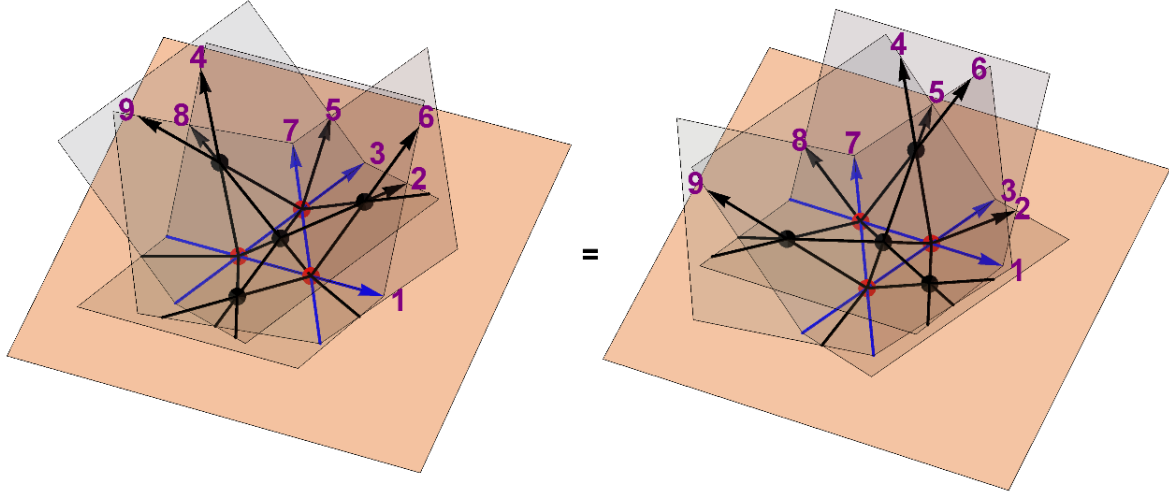


図 1: 3次元反射方程式 (2) の模式図. 黒丸が \mathbf{R} を, 赤丸が \mathbf{J} を表す.

本講演では, 四面体方程式の集合論的解を用いて 3次元反射方程式の集合論的解を得る方法, およびその応用に関する結果 [6] について報告する. ここで, 四面体方程式ならびに 3次元反射方程式とは, $2+1$ 次元における弦の運動を考えた際, その散乱振幅が衝突の順序に依らないことを要請して得られる方程式であり, それぞれ Yang-Baxter 方程式と反射方程式の高次元における類似物である. 結果を述べるための準備として, いくつか定義を行う. 以下では X を任意の集合とする.

定義 1. $\mathbf{R} : X^3 \rightarrow X^3$ が X^6 上の四面体方程式

$$\mathbf{T}_{123456} = \mathbf{R}_{245}\mathbf{R}_{135}\mathbf{R}_{126}\mathbf{R}_{346} = \mathbf{R}_{346}\mathbf{R}_{126}\mathbf{R}_{135}\mathbf{R}_{245}, \quad (1)$$

を満たす場合, \mathbf{R} を *tetrahedron map* と呼ぶ. ここで, 添字は非自明に作用する集合のラベルを表す. また, \mathbf{T}_{123456} を *tetrahedral composite* と呼ぶ.

定義 2. $\mathbf{R} : X^3 \rightarrow X^3$ を *tetrahedron map* とする. $\mathbf{J} : X^4 \rightarrow X^4$ が X^9 上の 3次元反射方程式

$$\mathbf{R}_{489}\mathbf{J}_{3579}\mathbf{R}_{269}\mathbf{R}_{258}\mathbf{J}_{1678}\mathbf{J}_{1234}\mathbf{R}_{456} = \mathbf{R}_{456}\mathbf{J}_{1234}\mathbf{J}_{1678}\mathbf{R}_{258}\mathbf{R}_{269}\mathbf{J}_{3579}\mathbf{R}_{489}, \quad (2)$$

を満たす場合, \mathbf{J} を *3D reflection map* と呼ぶ.

X^6 の部分集合 Y を $Y = \{(x_1, \dots, x_6) \mid x_2 = x_3, x_5 = x_6\}$ とする. また, $\phi : X^4 \rightarrow Y$, $\varphi : Y \rightarrow X^4$ をそれぞれ $\phi(x_1, x_2, x_3, x_4) = (x_1, x_2, x_2, x_3, x_4, x_4)$, $\varphi(x_1, x_2, x_2, x_3, x_4, x_4) = (x_1, x_2, x_3, x_4)$ とする.

定義 3. $\mathbf{R} : X^3 \rightarrow X^3$ を *tetrahedron map*, \mathbf{T} を対応する *tetrahedral composite* とする. \mathbf{T} が

$$\mathbf{x} \in Y \implies \mathbf{T}(\mathbf{x}) \in Y, \quad (3)$$

を満たすとき, \mathbf{R} を *boundarizable* と呼ぶ. また, $\mathbf{J} : X^4 \rightarrow X^4$ を

$$\mathbf{J}(\mathbf{x}) = \varphi(\mathbf{T}(\phi(\mathbf{x}))), \quad (4)$$

*e-mail: yoneyama@gokutan.c.u-tokyo.ac.jp

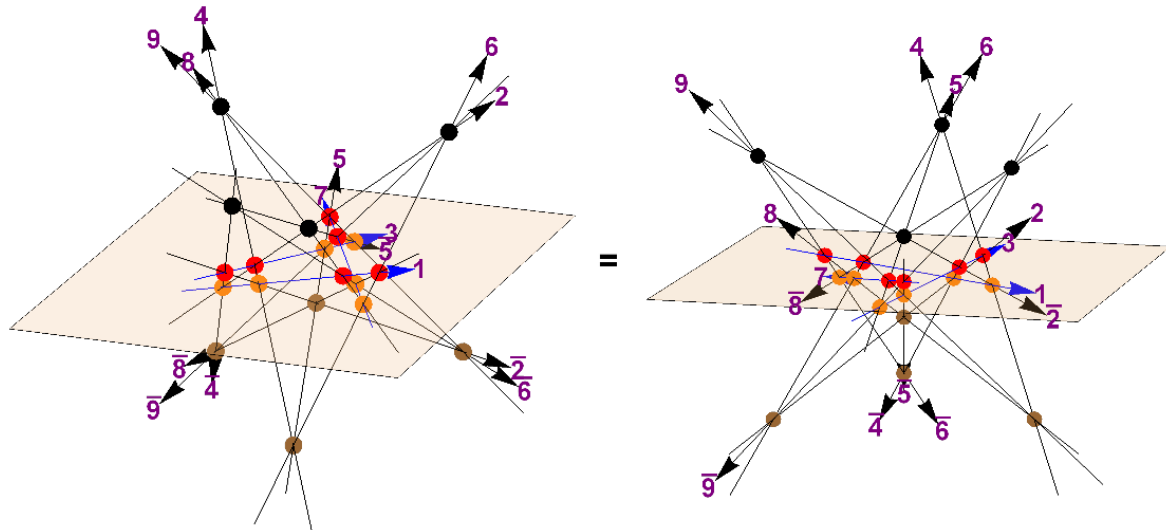


図 2: 定理 1 の証明に用いられる方程式の模式図. 各点は \mathbf{R} を表す. 黒丸と茶丸が図 1 の \mathbf{R} に対応し, 赤丸と橙丸が \mathbf{J} に boundarized される.

としたとき, \mathbf{J} を \mathbf{R} の *boundarization* と呼ぶ.

以上の準備の下で, 以下が成り立つ.

定理 1. $\mathbf{R} : X^3 \rightarrow X^3$ を $\mathbf{R}^2 = \text{id}$, $\mathbf{R}_{123} = \mathbf{R}_{321}$ を満たす *boundarizable* な *tetrahedron map* とする. また, $\mathbf{J} : X^4 \rightarrow X^4$ を対応する *boundarization* とする. このとき, \mathbf{R}, \mathbf{J} は 3次元反射方程式 (2) を満たす.

すなわち, 一般に定理 1 の条件を満たす四面体方程式の集合論的解を用いることで, 3次元反射方程式の集合論的解を得ることができる. 実際, [6] では [3, 5] で得られていた tetrahedron map がこれらの条件を満たしており, 新しい 3D reflection map を与えることを確認した. 定理 1 の証明は図的に理解することができ, 図 2 に図示される X^{15} 上における 20 個の \mathbf{R} が満たす方程式を「半分に分ける」ことで示される. 図 1,2 を見比べられたい. その際, 条件 (3) が満たされていることにより, X^{15} 上の方程式を X^9 上の 3D 反射方程式に落とすことができる. また, (4) は A_3 の Dynkin 図の B_2 への畳み込みに関連する [1] が, ここでは説明を省略する.

実は, 1+1次元においても Yang-Baxter 方程式の集合論的解の 6 個の積が満たす方程式を「半分に分ける」ことで反射方程式の集合論的解が得られており [2, 4], 上記の定理 1 はこれらの 2+1次元における類似になっている. 講演では, 時間の許す限りこうした結果についても紹介する予定である.

参考文献

- [1] A. Berenstein, A. Zelevinsky, *Tensor product multiplicities, canonical bases and totally positive varieties*, *Inventiones mathematicae* **143** 77–128 (2001).
- [2] V. Caudrelier, Q. C. Zhang, *Yang-Baxter and reflection maps from vector solitons with a boundary*, *Nonlinearity* **27** 1081–1103 (2014).
- [3] P. Kassotakis, M. Nieszporski, V. Papageorgiou, A. Tongas, *Tetrahedron maps and symmetries of three dimensional integrable discrete equations*, *J. Math. Phys.* **60** 123503 18pages (2019).
- [4] A. Kuniba, M. Okado, *Set-theoretical solutions to the reflection equation associated to the quantum affine algebra of type $A_{n-1}^{(1)}$* , *J. Int. Systems* **4** xyz013 10pages (2019).
- [5] S. Sergeev, *Solutions of the functional tetrahedron equation connected with the local Yang-Baxter equation for the ferro-electric condition*, *Lett. Math. Phys.* **45** 113–119 (1998).
- [6] A. Yoneyama, *Boundary from bulk integrability in three dimensions: 3D reflection maps from tetrahedron maps*, to appear in *Math. Phys. Anal. Geom.*, arXiv:2103.01105.